КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ
Кафедра теории относительности и гравитации

Б А Л А К И Н А. Б.

ПРИЧИННАЯ ТЕРМОДИНАМИКА И СТАТИСТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ И РЕКОМЕНДАЦИИ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ

Часть III. Полностью вырожденные фермионные системы в релятивистской астрофизике

КАЗАНЬ - 2015

УДК 537.8

Принято на заседании кафедры теории относительности и гравитации Института физики КФУ Протокол N 4 от 13 мая 2015 года

Рецензент

доктор физико-математических наук профессор кафедры высшей математики и математического моделирования Института математики и механики им.Н.И.Лобачевского **А.А. Попов**

Балакин А.Б.

Причинная термодинамика и статистика.

Часть III. Полностью вырожденные фермионные системы в релятивистской астрофизике

/ А.Б. Балакин. - Казань:

Казан. ун-т, 2015. - 17 с.

Курс «Причинная термодинамика и статистика» включен в программу обучения студентов второго года магистратуры Института физики КФУ и содержит дополнительные главы к общеобразовательному курсу «Статистическая физика и термодинамика».

В третьей части методических указаний речь идет о расчете макроскопических моментов функции распределения полностью вырожденных релятивистских фермионных систем, а также обсуждается вопрос о том, как эти тензорные величины используются в астрофизике.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Курс «Причинная термодинамика и статистика» включен в программу обучения студентов второго года магистратуры Института физики КФУ и содержит дополнительные главы к общеобразовательному курсу «Статистическая физика и термодинамика».

Методические указания к курсу «Причинная термодинамика и статистика» разделены на три части. В третьей части, которая предлагается вниманию пользователей, речь идет о расчете макроскопических моментов функции распределения полностью вырожденных релятивистских фермионных систем, а также обсуждается вопрос о том, как эти тензорные величины используются в астрофизике. Показано, как строится параметрическое уравнение состояния полностью вырожденного газа фермионов, и детально исследованы предельные случаи: нерелятивистский и ультрарелятивистский, которые могут быть описаны явно на языке политропных уравнений состояния. Приведены примеры приложения выполненных расчетов к теории строения белых карликов.

1 Введение

При чтении заголовка работы у пользователя может возникнуть вопрос: какое отношение статические по своей сути конфигурации полностью вырожденных фермионов с нулевой температурой имеют к Причиной термодинамике и статистике? Действительно, альтернативное название *Причинной* термодинамики связано с термином *Переходная (Transitive)* и само собой предполагает интерес к описанию нестационарных процессов [1,2]. Термин *полностью вырожденный* фермионный газ относится к объекту с нулевой температурой, и если температура постоянна и равна нулю, то кажется, что в этой системе не остается места для эволюционных процессов. Однако, имеется пример *стационарной* астрофизической модели, в которой нарушается Эйнштейновский постулат о существовании предельной скорости распространения информации. Этот пример связан с распределением скоростей движения звезд в рукавах спиральных галактик. Известно, что если моделировать вращение плоской звездной системы с помощью так называемого твердотельного закона, при котором тангенциальная скорость v пропорциональна ρ - расстоянию до центра галактики (т.е., $v = \omega\rho$, где $\omega = const$), то возникает классическая проблема *светового цилиндра.* Дело в том, что на расстоянии $\rho > \frac{c}{\omega}$ скорость перемещения звезд была бы больше скорости света, так что модель твердотельного вращения оказывается несправедливой. Одна из попыток создать модель, в которой принцип причинности не был бы нарушен, основана на введении в конституционные уравнения слагаемых, содержащих пространственные производные от давления и/или плотности энергии, аналогично тому, как производные по времени от давления или плотности энергии появлялись в класической Причинной термодинамике и статистике. В лекционном курсе мы затронули эту проблему и сформулировали её на математическом языке. В данных методических указаниях мы поговорим о конкретных расчетах, которые помогают иллюстрировать и визуализировать стационарную версию расширенной Причинной термодинамики и статистики, затронутой в одной из лекций курса.

2 Микроскопические и макроскопические характеристики вырожденной фермионной системы

2.1 Функция распределения

Равновесная восьмимерная функция распределения частиц, подчиняющихся статистике Ферми-Дирака

$$f(x^s, P^j) = \beta h^{-3} \left[\exp\left(\frac{-\mu + cV_i P^i}{k_B T} \right) + 1 \right]^{-1} \cdot \delta(\sqrt{P_k P^k} - mc)\,, \quad (1)$$

содержит одну стохастическую переменную: четыре-вектор импульса P^i, три функции: четыре-вектор скорости макроскопического движения системы в целом $V_i(x^s)$ (далее для краткости просто $V_i(x)$), химический потенциал $\mu(x)$, температуру $T(x)$, два постоянных параметра: индекс вырождения β и массу Ферми-частицы m, а также три фундаментальные константы: постоянную Планка h, скорость света в вакууме c и постоянную Больцмана k_B. Дельта-функция в данной формуле обеспечивает нормировку четыре-вектора импульса. В системе отсчета, в которой газ Ферми-частиц покоится, $V^i = \delta^i_0 \frac{1}{\sqrt{g_{00}}}$. В дальнейшем мы имеем дело с частицами, спин которых равен $s = \frac{1}{2}$, поэтому фактор вырождения $\beta = 2s + 1$ превращается в двойку. Термин *полностью вырожденный* Ферми-газ соответствует ситуации с нулевой температурой, т.е., $T = 0$. Как известно, при $T \to 0$ функция распределения (1) сводится к функции

$$f(x, P) = 2h^{-3}\, \Theta(\mu - cP_0)\, \delta(\sqrt{P_k P^k} - mc)\,. \quad (2)$$

Здесь $\Theta(\mu - cP_0)$ - это функция Хевисайда, которая равна нулю, если её аргумент отрицателен ($cP_0 > \mu$), равна единице, если аргумент положителен ($cP_0 < \mu$). Значение функции Хевисайда при $cP_0 = \mu$ принимается обычно равным $\frac{1}{2}$.

2.2 Плотность числа частиц, плотность энергии, давление и энтальпия полностью вырожденного газа фермионов

Макроскопические моменты функции распределения (1) находятся с помощью интегрирования по инвариантной мере

$$d\mathcal{M} \equiv f(x,P)\ \theta(V_i P^i)\ \mathbf{dP}\,, \quad \mathbf{dP} \equiv d^4P\ \sqrt{-g} \tag{3}$$

в импульсном пространстве. Функция Хевисайда $\theta(V_i P^i)$ вырезает в импульсном пространстве область с положительными значениями энергии частиц. Нас интересуют момент первого порядка

$$N^i = \frac{1}{mc} \int \mathbf{dP}\ P^i\ f(x,P)\,, \tag{4}$$

описывающий 4-вектор потока числа частиц, и момент второго порядка

$$T^{ik} = \frac{1}{m} \int \mathbf{dP}\ P^i P^k\ f(x,P)\,, \tag{5}$$

представляющий собой тензор энергии - импульса системы фермионов. При нахождении моментов необходимо помнить, что интегрирование по dP^0 снимается с помощью нормировочной дельта - функции с учетом правила интегрирования

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\ \Psi(\xi)\ \delta[\Phi(\xi)] = \sum_{a=1}^{n} \frac{\Psi(\xi_a)}{|\Phi'(\xi_a)|}\,, \tag{6}$$

где ξ_a - это корни функции $\Phi(\xi)$, т.е., решения уравнения $\Phi(\xi_a) = 0$. В нашем случае имеется два решения уравнения $P_k P^k = m^2c^2$:

$$P^0 = \pm \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} \sqrt{m^2c^2 - P_\alpha P^\alpha}\,, \tag{7}$$

где греческий индекс α маркирует три пространственные координаты. Функция Хевисайда $\theta(V_i P^i) = \theta(\sqrt{g_{00}} P^0)$ удаляет один из двух указанных корней (отрицательный). Таким образом, после первого интегрирования интересующие нас моменты принимают вид:

$$N^i = 2h^{-3} \int \frac{d^3 P \sqrt{-g}}{P_0} \; P^i \; \Theta(\mu - cP_0)\,, \tag{8}$$

$$T^{ik} = 2ch^{-3} \int \frac{d^3 P \sqrt{-g}}{P_0} \; P^i P^k \; \Theta(\mu - cP_0)\,. \tag{9}$$

Дальнейшие вычисления мы проведем в локально-лоренцевой системе отсчета, в которой метрические коэффициенты принимаются равными их значениям в пространстве Минковского. Пользователю рекомендуется в качестве *упражнения* записать полученный ниже ответ в произвольной системе отсчета. Обозначив символом P^2 положительную величину $P^2 = -P_\alpha P^\alpha$ и выполнив интегрирование по телесному углу в формуле (8), получим

$$N^i = 8\pi \delta^i_0 \; h^{-3} \int_0^\infty P^2 dP \; \Theta(\mu - c\sqrt{m^2c^2 + P^2})\,. \tag{10}$$

Равенство нулю аргумента функции $\Theta(\mu - c\sqrt{m^2c^2 + P^2})$ определяет граничное значение импульса, так называемый импульс Ферми

$$P_F = \sqrt{\frac{\mu^2}{c^2} - m^2c^2}\,, \tag{11}$$

выраженный с помощью химического потенциала μ. Более информативной для работы с импульсом Ферми является формула

$$P_F = \left(3\pi^2 \hbar^3 n\right)^{\frac{1}{3}}\,, \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}\,, \tag{12}$$

имеющая следующее происхождение. Согласно (10) плотность числа фермионов $n(x) = \sqrt{N^i N_i}$ получается прямым интегрированием

$$n(x) = 8\pi h^{-3} \int_0^{P_F} P^2 dP = \frac{8\pi}{3h^3} P_F^3\,, \tag{13}$$

откуда и появляется известная функция (12).

При вычислении компонент тензора энергии-импульса (9) следует помнить, что для равновесного газа Ферми - частиц только две величины: плотность энергии W и давление $\mathcal{P}$, - являются значащими функциями при реконструкции тензора энергии - импульса

$$T^{ik} = (W + \mathcal{P})V^i V^k - \mathcal{P} g^{ik} \,. \tag{14}$$

Эти две искомые функции определяются, соответственно, формулами:

$$W = \frac{8\pi c}{h^3} \int_0^{P_F} P^2 dP \sqrt{m^2c^2 + P^2} \,, \tag{15}$$

$$\mathcal{P} = \frac{8\pi c}{3h^3} \int_0^{P_F} \frac{P^4 dP}{\sqrt{m^2c^2 + P^2}} \,. \tag{16}$$

Интегралы стандартно вычисляются с помощью замены $\frac{P}{mc} \to sh\frac{\xi}{4}$ и дают следующие окончательные выражения (проверить в качестве *упражнения*):

$$W = \frac{\pi m^4 c^5}{h^3} \left[\frac{P_F}{mc} \left(1 + \frac{2P_F^2}{m^2c^2} \right) \sqrt{1 + \frac{P_F^2}{m^2c^2}} - ln \left(\frac{P_F}{mc} + \sqrt{\frac{P_F^2}{m^2c^2} + 1} \right) \right], \tag{17}$$

$$\mathcal{P} = \frac{\pi m^4 c^5}{h^3} \left[\frac{P_F}{mc} \left(\frac{2P_F^2}{3m^2c^2} - 1 \right) \sqrt{1 + \frac{P_F^2}{m^2c^2}} + ln \left(\frac{P_F}{mc} + \sqrt{\frac{P_F^2}{m^2c^2} + 1} \right) \right]. \tag{18}$$

Согласно формулам (17), (18) вспомогательная функция $h \equiv \frac{W+\mathcal{P}}{n}$, которая, как и в классической термодинамике, формально может быть названа удельной энтальпией, имеет весьма простой вид:

$$h \equiv \frac{W + \mathcal{P}}{n} = \frac{8\pi c}{3h^3 n} P_F^3 \sqrt{m^2c^2 + P_F^2} = E_F \,. \tag{19}$$

Здесь формула

$$E_F \equiv c\sqrt{m^2c^2 + P_F^2} \tag{20}$$

вводит новую вспомогательную функцию - энергию Ферми.

2.3 Уравнение состояния

2.3.1 Уравнение состояния полностью вырожденного газа фермионов в общерелятивистском случае

Для физических приложений важно иметь в арсенале теоретика следующее параметрическое представление всех полученных формул (получить данные формулы в качестве *упражнения*):

$$n = n^* sh^3\left(\frac{\xi}{4}\right), \tag{21}$$

$$W = \frac{3}{32} n^* mc^2 (sh\xi - \xi), \tag{22}$$

$$\mathcal{P} = \frac{1}{32} n^* mc^2 \left(sh\xi - 8sh\frac{\xi}{2} + 3\xi\right). \tag{23}$$

Здесь введен вспомогательный безразмерный параметр ξ и так называемая критическая плотность числа частиц n^*, которая фиксируется соотношением

$$n^* \equiv \frac{8\pi m^3 c^3}{3h^3}. \tag{24}$$

Плотность n^* является критической в том смысле, что соответствующий импульс Ферми равен $P_F = mc$, а скорость Ферми, формально определенная как $V_F = \frac{P_F}{m}$, равна скорости света (необходимо помнить, что последнее определение не имеет инвариантного смысла, а только указывает на известную аналогию). При таких обозначениях импульс Ферми и удельная энтальпия вырожденного газа Ферми-частиц

$$P_F = mc\left(\frac{n}{n^*}\right)^{\frac{1}{3}}, \tag{25}$$

$$h = \frac{W + P}{n} = mc^2 ch\frac{\xi}{4} = mc^2\sqrt{1 + \left(\frac{n}{n^*}\right)^{\frac{2}{3}}} \tag{26}$$

выражаются через безразмерную величину $\frac{n}{n^*}$.

Формулы (21), (22), (23) задают уравнение состояния полностью вырожденного газа Ферми-частиц со спином $\frac{1}{2}$ в *параметрическом* *виде*, если выполнено условие совместности

$$n\,\frac{\partial W}{\partial n} = W + P\,. \tag{27}$$

(см. вторую часть методических указаний). В нашем случае это соотношение удобно переписать в виде

$$\left(\frac{dW}{d\xi}\right)\left(\frac{dn}{d\xi}\right)^{-1} = h\,. \tag{28}$$

Тогда из (21), (22) получим

$$\frac{dn}{d\xi} = \frac{3}{4}n^* sh^2\left(\frac{\xi}{4}\right) ch\left(\frac{\xi}{4}\right) = \frac{3}{16}n^* sh^2\left(\frac{\xi}{2}\right) ch^{-1}\left(\frac{\xi}{4}\right)\,, \tag{29}$$

$$\frac{dW}{d\xi} = \frac{3}{32}n^* mc^2(ch\xi - 1) = \frac{3}{16}n^* mc^2 sh^2\left(\frac{\xi}{2}\right)\,. \tag{30}$$

Поскольку согласно (26)

$$h = mc^2 ch\left(\frac{\xi}{4}\right)\,, \tag{31}$$

справедливость (28) доказана.

2.3.2 Уравнение состояния полностью вырожденного нерелятивистского фермионного газа

В теории невырожденных систем газ считается нерелятивистским, если $mc^2 >> k_B T$, и ультрарелятивистским, если $mc^2 << k_B T$. Поскольку в модели полностью вырожденного газа фермионов температура считается равной нулю, следует переопределить предельные понятия: назовем газ нерелятивистским, если $P_F << mc$ и ультрарелятивистским, если $P_F >> mc$.

В нерелятивистском пределе параметр ξ следует считать малым и представить функции (21), (22), (23) с помощью главных членов разложения

$$n = \frac{n^*}{64}\xi^3\left[1 + \frac{\xi^2}{32} + ...\right]\,, \tag{32}$$

$$W = \frac{n^*}{64} mc^2 \xi^3 \left(1 + \frac{\xi^2}{20} + ...\right) , \tag{33}$$

$$\mathcal{P} = \frac{n^* mc^2}{64} \left(\frac{\xi^5}{80}\right) . \tag{34}$$

Тогда становится очевидным, что внутренняя энергия газа

$$W - nmc^2 = \frac{n^* mc^2}{64} \left(\frac{3\xi^5}{160}\right) \tag{35}$$

пропорциональна давлению с коэффициентом $\frac{3}{2}$, т.е.,

$$W - nmc^2 = \frac{3}{2} \mathcal{P} , \tag{36}$$

как и должно быть для нерелятивистского случая. Кроме того,

$$\mathcal{P} = \left(\frac{mc^2}{5 n^{*\frac{2}{3}}}\right) \; n^{\frac{5}{3}} , \tag{37}$$

т.е., мы имеем дело с политропным уравнением состояния $\mathcal{P} = K n^\gamma$, для которого показатель политропы равен $\gamma = \frac{5}{3}$, а коэффициент K определен формулой

$$K = \frac{mc^2}{5 n^{*\frac{2}{3}}} = \frac{h^2}{20m} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}} . \tag{38}$$

2.3.3 Уравнение состояния ультралятивистского полностью вырожденного фермионного газа

В ультрарелятивистском пределе параметр ξ следует считать много бо́льшим единицы и переписать (21), (22), (23) следующим образом:

$$n = \frac{n^*}{8} e^{\frac{3}{4}\xi} , \tag{39}$$

$$W = \frac{3n^*}{64} mc^2 e^{\xi} , \tag{40}$$

$$\mathcal{P} = \frac{n^* mc^2}{64} e^{\xi} = \frac{1}{3} W . \tag{41}$$

В данном пределе

$$\mathcal{P} = \left(\frac{mc^2}{4n^{*\frac{1}{3}}}\right)\ n^{\frac{4}{3}}\,, \tag{42}$$

т.е., мы опять имеем дело с политропным уравнением состояния с показателем политропы $\gamma = \frac{4}{3}$ и коэффициентом K, равным

$$K = \frac{mc^2}{4n^{*\frac{1}{3}}} = \frac{hc}{8}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}\,. \tag{43}$$

3 Примеры приложений

3.1 Соотношение масса-радиус для белого карлика

В качестве *самостоятельной* работы пользователю предлагается изучить теорию Лейна-Эмдена (см. Гл. 11 Раздел 3 книги [3]). Согласно этой теории структуру ньютоновской звезды-политропы, которая образована нерелятивистскими нуклонами с массой m_n и поддерживается в равновесии давлением газа электронов с показателем политропы γ, - описывает дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{z^2}\frac{d}{dz}\left(z^2\ \frac{dY}{dz}\right) + Y^{\frac{1}{\gamma-1}} = 0\,, \quad Y(0) = 1\,, \quad Y'(0) = 0\,. \tag{44}$$

Здесь введены две безразмерные функции. Во-первых, это безразмерная радиальная переменная z, определенная по правилу

$$r = z\ \sqrt{n^{\gamma-2}(0)\ \frac{K\gamma}{4\pi G\mu^2 m_n^2\,(\gamma-1)}}\,. \tag{45}$$

Во-вторых, это безразмерная искомая функция $Y(z)$ введенная по правилу:

$$n(r) = n(0)\ Y^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad \to \quad \mathcal{P}(z) = K\ n^{\gamma}(0)\ Y^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}(z)\,. \tag{46}$$

В контексте нашей дискуссии величина $n(r)$ зарезервирована для обозначения плотности электронов, обеспечивающих давление внутри звезды, а потому для распознавания плотности нуклонов, создающих тяготение, введен множитель μ, который показывает сколько нуклонов приходится на один электрон.

Если символом z_* обозначить ближайший к нулю корень уравнения $Y(z_*) = 0$ и иметь в виду, что $\mathcal{P}(z_*) = 0$, то становится очевидным, что радиус звезды R определяется соотношением $R = r(z_*)$ и равен величине

$$R = z_* \;\; n^{\frac{\gamma-2}{2}}(0) \; \sqrt{\frac{K\gamma}{4\pi G m_n^2 \mu^2 \,(\gamma-1)}}\,. \qquad (47)$$

Масса звезды

$$M = 4\pi m_n \mu \int_0^R r^2 n(r) dr \qquad (48)$$

рассчитывается в теории Лейна-Эмдена весьма элегантно (проверить в качестве *упражнения*, см. [3])

$$M = \frac{4\pi}{m_n^2 \mu^2} \; [n(0)]^{\frac{3\gamma-4}{2}} \left[\frac{K\gamma}{4\pi G(\gamma-1)}\right]^{\frac{3}{2}} {z_*}^2 \, |Y'(z_*)| \;. \qquad (49)$$

Центральная плотность числа электронов $n(0)$ - это свободный параметр моделирования звездных структур, и если его извлечь из (47) и подставить в (49), то получим знаменитое соотношение "масса-радиус"для звезд этого класса:

$$M = 4\pi (m_n \mu)^{\frac{\gamma}{\gamma-2}} \; R^{\frac{3\gamma-4}{\gamma-2}} \left[\frac{K\gamma}{4\pi G(\gamma-1)}\right]^{\frac{1}{2-\gamma}} {z_*}^{\frac{\gamma}{2-\gamma}} \;\; |Y'(z_*)| \;. \qquad (50)$$

Если параметры ньютоновской звезды-политропы K и γ определены, формула (50) начинает работать во всю свою эвристическую мощь.

3.2 Ньютоновские политропы, удерживаемые в равновесии давлением газа полностью вырожденных нерелятивистских электронов (белые карлики)

Для нерелятивистского полностью вырожденного газа электронов $\gamma = \frac{5}{3}$, $K = \frac{h^2}{20m_e}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}}$. Расчет значений z_* и $|Y'(z_*)|$ путем численного интегрирования уравнения (44) для $\gamma = \frac{5}{3}$ дает

$$z_* \simeq 3.65\,, \quad z_*^2\,|Y'(z_*)| \simeq 2.7\,. \tag{51}$$

Тогда радиус и масса белого карлика (именно так принято называть звезды этого типа) записываются следующим образом:

$$R_{WD} = 3.65 \;\; n^{-\frac{1}{6}}(0)\, \frac{h}{m_n\mu}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}\sqrt{\frac{1}{32\pi G m_e}}\,, \tag{52}$$

$$M_{WD} = \frac{32.4}{m_n^2\mu^2}\,[n(0)]^{\frac{1}{2}}\; h^3 \;\left[\frac{1}{32\pi G m_e}\right]^{\frac{3}{2}}\,. \tag{53}$$

В качестве *упражнения* пользователю предлагается оценить численные значения радиуса и массы нерелятивистских белых карликов как функции безразмерного параметра $\frac{n(0)}{n^*}$.

3.3 Ньютоновские политропы, удерживаемые в равновесии давлением газа ультрарелятивистских электронов. Расчет предельной массы Чандрасекара

Напомним, что теория Лейна-Эмдена построена для нерелятивистских нуклонов, создающих гравитационное поле звезды, но газу полностью вырожденных электронов не запрещено, вообще говоря, становиться ультрарелятивистским. Для ультрарелятивистского полностью вырожденного газа электронов $\gamma = \frac{4}{3}$, $K = \frac{hc}{8}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$. Расчет значений z_* и $|Y'(z_*)|$ для $\gamma = \frac{4}{3}$ дает

$$z_* \simeq 6.9\,, \quad z_*^2\,|Y'(z_*)| \simeq 2\,. \tag{54}$$

Масса и радиус такой звезды записываются следующим образом:

$$R_{\mathrm{C}} = \frac{6.9}{m_n \mu} \;\; n^{-\frac{1}{3}}(0) \;\; \left(\frac{3}{\pi}\right)^{\frac{1}{6}} \sqrt{\frac{hc}{8\pi G}}\,, \tag{55}$$

$$M_{\mathrm{C}} = \frac{\sqrt{3\pi}}{m_n^2 \mu^2} \;\; \left(\frac{hc}{2\pi G}\right)^{\frac{3}{2}}\,. \tag{56}$$

Масса звезды данного типа не зависит от центральной плотности, поэтому случай с $\gamma = \frac{4}{3}$ называют критическим. По своему физическому смыслу M_C - это предельное значение массы устойчивой ньютоновской политропы, в которой тяготение уравновешено давлением ультрарелятивистского полностью вырожденного электронного газа. Это так называемый предел Чандрасекара. Пользователю предлагается в качестве *упражнения* найти численое значение предельной массы ($M_C \simeq 1.2 M_{Sun}$), определить, какое значение параметра μ было использовано при нахождении предела Чандрасекара и выяснить какое отношение данное значение μ имеет к устойчивому элементу ${}_{26}Fe^{56}$ из периодичекой системы химических элементов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Jou D., Casas - Vazques J. and Lebon G. *Extended Irreversible Thermodynamics.* - 1996. - Berlin. Springer Verlag.

[2] Балакин А.Б. *Релятивистская теория многочастичных систем. Часть II. Релятивистская гидродинамика.* - 2003.- Казань. Изд. «Унипресс». 68 С.

[3] Вейнберг С. *Гравитация и космология.* - 1975. - Москва. Мир. 696 С.

СОДЕРЖАНИЕ

.

Учебное издание

Балакин Александр Борисович

ПРИЧИННАЯ ТЕРМОДИНАМИКА И СТАТИСТИКА.
Часть III. Полностью вырожденные фермионные системы в релятивистской астрофизике
Подписано в печать 15.05.2015